Teil I: Stoffgebiete der Mittelstufe

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ $\qquad$ $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$

Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Lösungsformel für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Potenzen und Wurzeln

$a^0 = 1$ $\qquad$ $a^1 = a$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad$ $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ $\qquad$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\qquad$ $\left(a^x\right)^z = a^{x \cdot z}$

$a^x \cdot a^z = a^{x+z}$ $\qquad$ $\frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$ $\qquad$ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ $\qquad$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ $\qquad$ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Geradengleichung

$f(x) = mx + t$; $\qquad$ Punkt-Steigungsform: $f(x) = m \cdot (x - x_0) + y_0$

Parabelgleichung

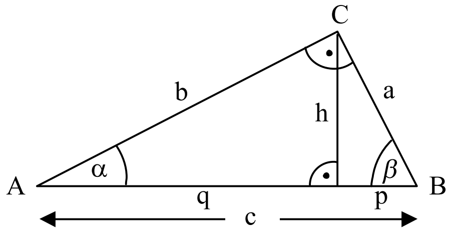
$f(x) = ax^2 + bx + c$	(allgemeine Form)
$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$	(Scheitelform)
$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	(Linearfaktorform)

Logarithmen

$\log_b(u\,v) = \log_b(u) + \log_b(v)$ $\qquad$ $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$

$\log_b\left(u^z\right) = z \cdot \log_b(u)$ $\qquad$ $\log_c(a) = \frac{\log_b(a)}{\log_b(c)}$

Rechtwinkliges Dreieck



Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = p\,q$

Kathetensatz: $a^2 = c\,p$; $\;b^2 = c\,q$

Sinus und Kosinus

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ $\qquad$ $\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi$ $\qquad$ $(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$

$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ $\qquad$ $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$

Flächengeometrie

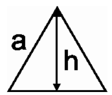
A : Flächeninhalt
U : Umfang

Allgemeines Dreieck: $A = \frac{1}{2} g\,h$

Kreis: $U = 2r\pi$;

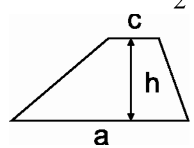
$A = r^2\pi$

Gleichseitiges Dreieck: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$;



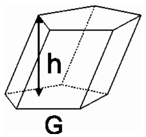
$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Trapez: $A = \frac{a+c}{2} h$

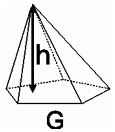


Raumgeometrie

Prisma: $V = G\,h$

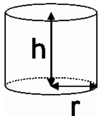


Pyramide: $V = \frac{1}{3} G\,h$



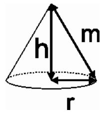
gerader Kreiszylinder:

$V = r^2 \pi h$;
$M = 2 r \pi h$



gerader Kreiskegel:

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$;
$M = r \pi m$



Kugel: $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$;
$O = 4 r^2 \pi$

V : Volumen **M** : Mantelfläche
O : Oberfläche **G** : Grundfläche

Teil II: Analysis

Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems

$f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ $\Leftrightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse
(f heißt dann *gerade Funktion*)

$f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ $\Leftrightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung
(f heißt dann *ungerade Funktion*)

Grenzwerte

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0 \;; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \,; \qquad \lim_{x \to 0} \left(x^r \cdot \ln x \right) = 0 \qquad (\text{jeweils } r > 0)$$

Definition der Ableitung

Ableitung: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,
falls der Grenzwert existiert und endlich ist.

Schreibweisen: $f'(x) = y' = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}; \qquad \dfrac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$

Ableitung der Grundfunktionen

$(x^r)' = r\, x^{r-1}$ $\qquad (\frac{1}{x^r})' = -\frac{r}{x^{r+1}}$

$(e^x)' = e^x$ $\qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Ableitungsregeln

Summenregel: $f(x) = u(x) + v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Faktorregel: $f(x) = c \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = c \cdot u'(x)$

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel: $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Kettenregel: $f(x) = u\big(v(x)\big) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$

L`Hospitalsche Regeln

- Gilt $z(a) = n(a) = 0$ und existiert $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{z'(x)}{n'(x)}$, so gilt $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{z(x)}{n(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{z'(x)}{n'(x)}$.
- Gilt $|z(x)| \to \infty$ und $|n(x)| \to \infty$ für $x \to a$ und existiert $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{z'(x)}{n'(x)}$,
  so gilt $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{z(x)}{n(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{z'(x)}{n'(x)}$.
- Beide Regeln gelten in ähnlicher Weise auch für $|x| \to \infty$ (anstelle von $x \to a$).

Anwendungen der Differenzialrechnung

- Gleichung der Tangente im Punkt $P\,(x_0 \mid f(x_0))$: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
- Monotoniekriterium:
  $f'(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ f fällt streng monoton in I.

  $f'(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ f steigt streng monoton in I.

- Art von Extremwerten (mithilfe der zweiten Ableitung):
  $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f hat an der Stelle x_0 ein relatives Minimum.
  $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ f hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum.
- Graphenkrümmung:
  $f''(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I rechtsgekrümmt.
  $f''(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I linksgekrümmt.
- Wendepunkt:
  Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen,
  so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.
- Terrassenpunkt:
  Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen,
  so hat G_f an der Stelle x_0 einen Terrassenpunkt.

Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Wichtige unbestimmte Integrale

$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \ln x\, dx = -x + x \ln x + C$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, wobei F Stammfunktion von f ist.

Uneigentliche Integrale: $\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

Teil III: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Gesetze der Mengenalgebra: $\overline{A} = \Omega \setminus A$; $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \{\ \}$;
$\overline{\overline{A}} = A$; $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Gesetze von De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Unvereinbarkeit: $A \cap B = \{\ \}$

Ereigniswahrscheinlichkeiten: $P(\{\ \}) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Satz von Sylvester: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Unabhängigkeit von zwei Ereignissen: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Elemente in einer Reihe anzuordnen.

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$

Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit n Elementen Teilmengen mit k Elementen zu bilden.

Laplace-Experiment: Alle Elementarereignisse des zugehörigen Ergebnisraumes sind gleich wahrscheinlich.

Es gilt dann: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Zufallsgrößen – Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Die Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an. Dann gilt:

- **Erwartungswert:** $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$
- **Varianz:** $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$
  $= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$

  Verschiebungsregel: $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$
- **Standardabweichung:** $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Binomialverteilung

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Treffer in einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p.
Dann heißt die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung „***Binomialverteilung***“.
X heißt binomialverteilt, genauer B(n; p)-verteilt.

Ist die Zufallsgröße X binomialverteilt nach B(n; p), so gilt:

$$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n$$

mit Erwartungswert $E(X) = n \cdot p$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Hypothesentest

Beim Testen der Nullhypothese H_0 im Signifikanztest können zwei Fehler auftreten:

Fehler 1. Art: H_0 wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.
Fehler 2. Art: H_0 wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Als „***Signifikanzniveau***“ α des Tests bezeichnet man die größtmögliche noch akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

Teil IV: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + a_{13} \cdot v_3 \\ a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + a_{23} \cdot v_3 \\ a_{31} \cdot v_1 + a_{32} \cdot v_2 + a_{33} \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

Leontief – Modell: $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$

Lineare Unabhängigkeit

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig,
wenn die Gleichung $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$ nur mit $\lambda = \mu = \nu = 0$ lösbar ist.

Gerade im $\mathbb{R}^3$

- Punkt-Richtungsform: $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$
- Zwei-Punkte-Form $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Ebene im $\mathbb{R}^3$

Parameterformen

- Punkt-Richtungsform: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
- Drei-Punkte-Form: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \mu \cdot (\vec{c} - \vec{a})$

Parameterfreie Formen

- Koordinatenform: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$
- Achsenabschnittsform: $E: \frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{t} + \frac{x_3}{u} = 1$

  Festlegung durch die Achsenschnittpunkte
  S(s| 0| 0), T(0| t| 0) und U(0| 0| u)